SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

INTERVENTO DI GIUSEPPE MARINO AL LABORATORIO PLS INTERDISCIPLINARE DI MATEMATICA E STATISTICA CON APPLICAZIONI IN EXCEL

29 GENNAIO 2014

- PROLOGO

Successioni definite per ricorrenza ed equazioni alle differenze finite.
Trovare le sol. lin. indipendenti delle eq. lineari di ordine n a coeff. costanti.
Applicazione ai numeri di Fibonacci:

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ EQ. ALG. ASSOCIATA $\lambda^2 = \lambda + 1$. SOL. EQ. ALG. ASS. $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Ma $F_0 = 0$, $F_1 = 1 \Rightarrow F_0 = a + b = 0$, $F_1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

- Metodo generale per vedere convergenza o divergenza di successioni definite per ricorrenza monotone.

- PROBLEMA DEL BACO LENTO MA TENACE

Un baco, lento ma tenace, parte da un'estremità di un nastro di gomma perfettamente elastico lungo 1 metro e avanza verso l'altra estremità ad una velocità di ~~10 cm al secondo~~ 10 cm/min. Ad ogni minuto, però, uno spirito maligno allunga il nastro di 1 metro. Così, alla fine del 1° minuto, il baco è a 10 cm dal punto di partenza e a 90 cm da quello di arrivo. Ma, poiché è passato un minuto, il nastro viene allungato di 1 metro. Il baco mantiene la sua posizione relativa durante l'allungamento a 10% dalla partenza e 90% dall'arrivo e quindi, all'inizio del 2° minuto, si trova a 20 cm dalla partenza e 180 cm dall'arrivo. Dopo 2 minuti si trova a 30 cm dalla partenza e 170 cm dall'arrivo, ma il nastro viene allungato e le distanze diventano 45 e 255 cm. Riuscirà mai il baco a raggiungere la meta?

<u>SOL</u>: Sia a_n = "distanza, in metri, percorsa dal baco dopo n minuti". Allora

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + \frac{1}{10}$$

$\{a_n\} \uparrow$ e $\lim a_n = +\infty$.

Il problema è di vedere se $\exists n$ t.c. $a_{n+1} > n+1$?

<u>NOTA</u> legato a questo è questo limite:

$$\lim \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \lg n \right) = \gamma,$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni, $\gamma \sim 0.57$

<u>DIM</u>.

<u>PASSO 1</u>. $\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

<u>DIM PASSO 1</u> Proviamo di più che $\varphi(x) = \lg(1+x) - x < 0 \quad \forall x > 0$. Infatti $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(x) < 0 \quad \forall x > 0$.

<u>PASSO 2</u> $\frac{1}{n+1} < \lg(1+n)$.

Sia $\frac{1}{n} = x$. Allora la tesi equivale a $\varphi(x) = \lg(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0$. Mostriamo che è vero $\forall x > 0$ mostrando che $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x > 0$, mentre $\varphi(0) = 0$

<u>PASSO 3</u> $\frac{1}{n+1} < \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

<u>DIM PASSO 3</u> Ovvia dai passi 1 e 2.

<u>PASSO 4</u> Sia $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $a_n \stackrel{\text{def}}{=} S_n - \lg n$, $b_n = S_{n-1} - \lg n$, $n \geq 2$, cosicché $a_n = b_n + \frac{1}{n}$. Allora $\{a_n\} \downarrow$ e $\{b_n\} \uparrow$.

<u>DIM PASSO 4</u> $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$ dal Passo 2

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ dal Passo 1.

Dunque $\exists \gamma > 0$ t.c. $\gamma = \lim a_n = \lim b_n$.

Inoltre $b_n \leq \gamma \leq a_n \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow \frac{a_n + b_n}{2}$ è un valore approssimato di γ con un errore inferiore a $\frac{a_n - b_n}{2} = \frac{1}{2n}$. In particolare, per $n = 5$ si ha un valore approssimato di γ con un errore $< 1/10$, $\gamma \approx \frac{131}{60} - \lg 5 \cong 0.57$

NOTA $\quad \lg 22000 - \lg 12000 \sim \mu$!!!

(In realtà non è inaspettato per la "terribile" proprietà dei logaritmi:

$$\lg 22000 - \lg 12000 = \lg \frac{22000}{12000} = \lg \frac{11}{6} = \lg 1.8\overline{3} \simeq \mu$$

• ALGORITMO DI ERONE PER LA RICERCA DELLA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO POSITIVO x.

Sia $a_1 > \sqrt{x}$. L'algoritmo è

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

DIM. • $a_1 > \sqrt{x}$ (Per esempio $a_1 = 1$ se $0 < x < 1$, $a_1 = x$ se $x > 1$)

$\Rightarrow$ moltiplicando per $\frac{\sqrt{x}}{a_1}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x} > \frac{x}{a_1}$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{a_1}$ è approssimazione per difetto.

Allora l'idea è di ritenere che il punto medio $a_2 = \dfrac{a_1 + \frac{x}{a_1}}{2}$ sia un'approssimazione migliore. Se $a_2 > \sqrt{x}$ allora possiamo ~~iterare~~ iterare il procedimento.

$a_2 \overset{?}{>} \sqrt{x} \iff a_2 - \sqrt{x} > 0$. Infatti $a_2 - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right) - \sqrt{x} =$

(mettendo in evidenza $\frac{1}{2a_1}$)

$$= \frac{1}{2a_1}\left[a_1^2 + x - 2a_1\sqrt{x}\right] = \frac{1}{2a_1}\left(a_1 - \sqrt{x}\right)^2 > 0 \text{ per ipotesi.}$$

Dunque l'algoritmo di Erone fornisce approssimazioni sempre migliori di $\sqrt{x}$.

Sappiamo che $a_n > \sqrt{x}$, $\frac{x}{a_n} < \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) < \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{x}\right) \Rightarrow$

(sottraendo $\sqrt{x}$) $\Rightarrow$ $a_{n+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{x}\right)$, cioè L'ERRORE CHE SI COMMETTE, SCEGLIENDO a_n COME VALORE APPROSSIMATO DI $\sqrt{x}$, SI DIMEZZA AD OGNI ITERAZIONE. $\Rightarrow$

STIMA DELL'ERRORE: La differenza (o errore) $a_{n+1} - \sqrt{x}$ è stimato con l'errore iniziale $a_1 - \sqrt{x}$ nel modo seguente:

$$a_{n+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2^n}\left(a_1 - \sqrt{x}\right).$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x} < a_{n+1} < \sqrt{x} + \frac{1}{2^n}\left(a_1 + \sqrt{x}\right)$$

$n \to \infty$ $\qquad$ TEO. CARABINIERI $\qquad$ $n \to \infty$

$\sqrt{x}$

In realtà l'algoritmo di Erone è un caso particolare del

METODO DI NEWTON PER IL CALCOLO DELLE RADICI DI UN'EQUAZIONE:

TEOREMA Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa, con $f(a)<0$, $f(b)>0$ e $f'(x)>0$ $\forall x \in [a,b]$. Allora la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge decrescendo all'unica sol. $x_0 \in [a,b]$ dell'eq. $f(x)=0$

ESERCIZIO 1: Vedere se esiste, ed in caso affermativo, trovare $\lim a_n$, dove $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n^2$

SOL Mostriamo per induzione che $0 < a_n < 1$. Dunque $\Rightarrow a_n \downarrow$, perché $a_{n+1} = a_n^2 < a_n \Rightarrow \exists \lim a_n = 0$

ESERCIZIO 2 Come sopra con $a_1 = 2$

SOL $\{a_n\}\uparrow$, $a_n \to +\infty$

ESERCIZIO 3 $a_0 = 5$ $a_{n+1} = a_n/(1+a_n)$

SOL $\lim = 0$.

ESERCIZIO 4 $a_0 = \alpha \geq 0$, $a_{n+1} = \sqrt[4]{a_n}$

SOL Se $0<\alpha<1$ $a_n \uparrow$ e $a_n \in]0,1[$. Se $\alpha > 1$ allora $a_n \downarrow$ e $a_n > 1$.
In ogni caso $\lim a_n = 1$.

ESERCIZIO 5 (UN POCHINO PIÙ DIFFICILE) $a_0 = \alpha > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$

SOL Possibile limite: $L = 1$. $\{a_n\}$ non è monotona. Però le due sottosucc. di ordine pari e dispari sono entrambe monotone e convergenti ad 1.

~~ESERCIZI~~

PER FINIRE

ESERCIZIO DELLE PALLE CHE SCENDONO DAL CIELO